تشکیل ماتریس پایه پوچی تنک برای تحلیل بهینهٔ سازه‌ها به روش نرمی با استفاده از الگوریتم جستجوی سیستم ذرات باردار*

مریم داعی[۱]		شهرزاد تمجیدزاد[۲]		سید حمید میرمحمدی[۳]

چکیده *در این مقاله، الگوریتمی برای تشکیل بردارهای پایه پوچی بهینه که منجر به تشکیل ماتریس نرمی تنک می‌شود، ارائه شده است. در مدل‌سازی مسئله بهینه‌یابی برای برقراری شرط استقلال بردارهای پایه پوچی که متناظر با سیستم‌های خودمتعادل می‌باشند، بـرای هـر سیسـتم یک مولد درنظر گرفته شده و سپس توالی انتخاب مولدها به‌عنوان متغیر تصمیم در مسئلهٔ بهینه‌یابی مدل‌سازی شده است. با توجه بـه ایـن‌کـه پس از انتخاب مولدها، دستگاه معادله‌های حاصل برای یافتن سایر درایه‌های بردارهای پایه پوچی یک دستگاه فرومعین خواهد بود، به‌منظـور محاسبهٔ پرصفرترین پاسخ، یک مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط توسعه داده شده است. در این مقاله برای حل مدل پیشنهادی از الگوریتم فراابتکاری جستجوی سیستم ذرات باردار استفاده می‌شود، از آن‌جایی که مکانیزم الگوریتم جستجوی سیستم ذرات باردار بـر مبنـای حرکـت ذرات به‌صورت پیوسته در فضای پاسخ است، بنابراین در این مقاله برای حل مسئلهٔ در فضای گسستهٔ صفر و یکی راهکاری پیشـنهاد شـده و عملگر احتمال جهش نیز اضافه گردیده است. نتیجه عددی محاسبات نشان می دهد که الگوریتم پیشنهادی بادقت و سرعت مناسب قـادر بـه یافتن پاسخ نزدیک بهینه می‌باشد.*

واژه‌های کلیدی تحلیل بهینه؛ روش نرمی؛ بردار پایه پوچی؛ الگوریتم جستجوی سیستم ذرات باردار.

Formation of Sparse Null Bases for Optimal Force Method Analysis Using Charged System Search Algorithm

M. Daei		Sh. Tamjidzad		S. H. Mirmohammadi

Abstract *In this paper, an algorithm is presented for the formation of optimal null basis vectors corresponding to sparse flexibility matrices. For controlling the independence of the vectors, a generator is selected in each corresponding self-equilibrating systems, and the sequence of generators is modeled as decision variables. Since the equilibrium conditions and uniqueness of generators consists a underdetermined linear system, a linear mixed integer programming model is presented for finding sparse solution. In charged system search algorithm, the movement of charged particles is tracked in a continuous domain, therefore it is modified for using in a discrete binary space, and also a new operator called probability of mutation is defined in this paper. The numerical examples shows that the proposed method enables to find suboptimal solution, while using short computational time and resulting good accuracy.*

Keywords Optimal Analysis; Force Method; Null Bases; Charged System Search Algorithm.

---

* تاریخ دریافت مقاله ۹۳/۱/۱۰ و تاریخ پذیرش آن ۹٤/۷/۱۹ می‌باشد.

(۱) نویسندهٔ مسئول: استادیار، گروه عمران، دانشکدهٔ فنی و مهندسی، دانشگاه اصفهان.

(۲) دانشجو کارشناسی ارشد مهندسی صنایع، دانشکدهٔ مهندسی صنایع و سیستم‌ها، دانشگاه صنعتی اصفهان.

(۳) استادیار، دانشکدهٔ مهندسی صنایع و سیستم‌ها، دانشگاه صنعتی اصفهان.

مقدمه

تحلیل ماتریسی به‌روش نرمی به‌طور گسترده‌ای تا سال ۱۹٦۰ مورد توجه محققان بود، ولی پس از آن با افزایش حافظه و سرعت کامپیوترها و جوابگویی روش تغییر مکان‌ها برای انواع مختلف سازه‌ها، توجه بیشتر محققان به روش‌های تغییرمکانی سوق داده شد. در نتیجه روش نرمی و مزایای آن در تحلیل غیرخطی و بهینه‌یابی سازه‌ها نادیده گرفته شد. اگر چه پس از این روند پیشرفت روش نرمی کند بوده است، اما تحقیقات زیادی در جهت بهبود این روش انجام شده و روش‌های مناسب برای برنامه‌نویسی کامپیوتری در تحقیقات کاوه[1] گسترش یافته است.

اولین روش جبری توسط دنک[2] ارائه شده است. روش پیشنهادی وی استفاده از روش حذف گوس- جردن برای به‌دست آوردن پایهٔ استاتیکی از روی معادله‌های تعادل می‌باشد.

روش‌های جبری طبیعتاً ساده و کلی هستند اما حافظه و تعداد عملیات مورد نیاز آنها به‌طور کلی بیشتر از سایر روش‌ها می‌باشد. به‌منظور افزایش قابلیت‌های روش‌های جبری، در مراحل مختلف عملیات جبری، روش‌های ترکیبی جایگزین شده‌اند.

مشکل اساسی در کاربرد روش‌های نرمی، تشکیل ماتریس سیستم‌های خود متعادل به‌گونه‌ای است که منجر به ماتریس نرمی خوش‌ساختار شود. از این‌رو تلاش‌های متعددی برای حل این مسئله انجام شده است. به‌طور کلی روش‌های توپولوژیکی و ترکیباتی عمدتاً برای حالت‌های خاصی از سازه‌ها به‌ویژه قاب‌ها با اتصالات صلب مؤثر هستند و روش‌های عمومی نمی‌باشند. از طرف دیگر روش‌های جبری کاربرد عمومی‌تر دارند و بازهٔ گسترده‌ای از سازه‌ها را پوشش می‌دهند، ولی حافظهٔ لازم و تعداد عملیات مورد نیاز آنها زیاد می‌باشد.

در سال‌های اخیر کاوه و همکاران[3-5] با بهره‌گیری از تئوری گراف‌ها روش‌های کارآمدی را در تحلیل به‌روش نرمی ارائه داده‌اند.

در این مقاله برای رفع مشکلات روش‌های کلاسیک و به‌عنوان یک رویکرد جدید، مسئلهٔ تشکیل ماتریس نرمی بهینه به‌صورت یک مسئلهٔ بهینه‌یابی مدل‌سازی شده است که در آن هدف پیدا کردن تنک‌ترین ماتریس نرمی می‌باشد. مدل طراحی شده یک مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط مقید می‌باشد که در آن تابع هدف تعداد درایه‌های غیرصفر ماتریس پایه‌های پوچی تعریف شده و شرایط تعادل و استقلال در قیدها در نظر گرفته شده است. اگر چه پیدا کردن ماتریس نرمی خوش‌ساختار در قالب یک مسئلهٔ بهینه‌یابی، یک مسئلهٔ NP-hard است، اما با استفاده از الگوریتم‌های فراابتکاری می‌توان با دقت مناسب و سرعت بالا پاسخ نزدیک به بهینه را برای این مسئله پیدا کرد[6] .

در این مقاله برای حل مدل پیشنهادی از الگوریتم فراابتکاری جستجوی سیستم ذرات باردار (CSS) [7] استفاده شده است. در سال‌های اخیر این الگوریتم به‌طور گسترده‌ای در مسائل مختلف سازه‌ای به‌کار برده شده است. این تحقیقات نشان می‌دهد که الگوریتم CSS از سرعت همگرایی بالایی برخوردار است و در فرآیند یافتن پاسخ بهینه موازنه مطلوبی بین اکتشاف و بهره‌برداری وجود دارد [8-10]. مکانیزم این الگوریتم بر مبنای حرکت ذرات به‌صورت پیوسته در فضای پاسخ استوار است، بنابراین در این مقاله الگوریتم CSS به‌منظور به‌کارگیری و جستجو در یک فضای گسستهٔ صفر و یک توسعه داده شده است.

روش ارائه شده با فرض وجود نامعینی داخلی برای خرپای دوبعدی ارائه شده است. اگرچه از رویکرد پیشنهادی می‌توان برای به‌کارگیری در تحلیل به‌روش نرمی سایر حالات نیز بهره گرفت.

تعریف مسئلهٔ تشکیل ماتریس پایه‌های پوچی به‌صورت یک مدل بهینه‌یابی

برای یک سازه با M عضو و N گره کـه $\gamma(S)$ مرتبـهٔ نامعین استاتیکی می‌باشد، از بـین مجهـولات بـه تعـداد $\gamma(S)$ نیروی مجهول مستقل از هم که در اصطلاح زائـد اسـتاتیکی گفتـه مـی‌شـوند، انتخـاب مـی‌گردنـد. ایـن مجهـولات را مـی‌تـوان از بـین نیروهـای داخلـی و یـا عکس‌العمل‌های خارجی انتخاب کرد که به‌صورت زیـر نمایش داده می‌شوند:

$$q = \left\{q_۱, q_۲, ..., q_{\gamma(S)}\right\}^t \qquad (۱)$$

با حذف زائدهای استاتیکی، سازه تبدیل بـه یـک سازه معین استاتیکی می‌شود که در اصطلاح سـازهٔ پایـه گفته می‌شود. بارگذاری گرهی خارجی به‌صـورت زیـر نشان داده می‌شود که n تعداد بارهای گرهی می‌باشد.

$$p = \left\{p_۱, p_۲, ..., p_n\right\}^t \qquad (۲)$$

بر این اساس می‌توان بردار تلاش‌هـای داخلـی r ناشی از بارگذاری خارجی p را به‌صـورت زیـر بیـان کرد:

$$r = B_۰ p + B_۱ q \qquad (۳)$$

در این رابطه $B_۰$ و $B_۱$ مـاتریس‌هـای مسـتطیلی می‌باشند که به تعداد کل مجهولات m ردیف دارنـد و تعداد ستون‌های آن‌ها به‌ترتیب بـه تعـداد بـار خـارجی گرهی n و به تعـداد درجـهٔ نـامعینی اسـتاتیکی سـازه $\gamma(S)$ می‌باشد. در این رابطـه $B_۰ p$ پاسـخ ویـژهٔ مسـئلهٔ می‌باشد که شرط تعادل تحت اثر نیروهـای خـارجی را ارضا می‌نماید و $B_۱ q$ پاسخ مکمل می‌باشد کـه از روی مجموعه سیستم‌های خودمتعادل (SES) که در اصـطلاح جبری پایه پوچی گفته می‌شوند، بهدست می‌آید.

با استفاده از رابطهٔ نیرو- تغییـر مکـان بـرای هـر عضو و جمع‌بندی آن در ماتریس قطـری اسـمبل نشـده نرمی F_m، و با بـه‌کـارگیری اصـل کـار مجـازی مقـدار تلاش‌های داخلی r از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید [11]

$$r = [B_۰ - B_۱(B_۱^t F_m B_۱)^{-۱} B_۱^t F_m B_۰]\, p \qquad (٤)$$

در این رابطه $G = B_۱^t F_m B_۱$ به‌عنوان ماتریس نرمی سازه می‌باشد.

برای تحلیل بهینهٔ سازه بـه‌روش نرمـی، مـاتریس نرمی G می‌بایست در حد امکان تنک و خوش‌سـاختار باشد. برای رسیدن به این ویژگی‌ها در ماتریس G، لازم است ماتریس $B_۱$ به‌گونهٔ مناسب طراحـی گـردد، زیـرا شکل ماتریس F_m که مربوط به سازه به‌صـورت منفـک شده می‌باشد ثابـت و غیـرقابـل تغییـر مـی‌باشـد. پـس می‌توان گفت مسئلهٔ یافتن شـکل بهینـهٔ بردارهـای پایـه پوچی به‌نحوی است که شرط تعادل (رابطهٔ ۵) و شـرط استقلال بردارها برقرار باشـد. منظـور از شـرط تعـادل، رابطهٔ تعادل استاتیکی نیروها در تمـام گـره‌هـای سـازه مـی‌باشـد. در ایـن رابطـه مـاتریس A مـاتریس تعـادل می‌باشد که به تعداد رابطه‌های تعـادل (دو برابـر تعـداد گره‌ها برای خرپای دو بعدی با نامعینی داخلی) سـطر و به تعداد المان‌ها خرپا سـتون دارد. در واقـع درایـهٔ ijام این ماتریس ضریب نیـرو بـرای المـان j ام در i امـین معادلهٔ تعادل می‌باشد.

$$AB_۱ = ۰ \qquad (۵)$$

درصورتی کـه هـر سـتون از مـاتریس $B_۱$ بـا S_i نمایش داده شود، به‌منظور برقراری شـرط اسـتقلال، در هر ستون S_i درایه‌ای به‌عنوان مولد انتخاب می‌شود کـه این مولد باید در ستون S_i برابر با یک و در ستون‌هـای بعدی برابر صفر باشد. پس از مشخص شدن مولد، سایر درایه‌های هر ستون براساس برقراری رابطه‌هـای تعـادل محاسبه می‌شود.

بنابراین برای محاسبهٔ شکل بهینهٔ ماتریس $B_۱$، دو مسئله می‌بایست مورد توجـه قـرار گیـرد؛ اولاً انتخـاب شماره و ترتیب مولدها می‌بایست هوشـمند باشـد زیـرا سـاختار مـاتریس $B_۱$ از نحـوهٔ انتخـاب مولـدها تـأثیر می‌پذیرد، ثانیاً پس از مشـخص شـدن مولـد بـرای هـر ستون پرصـفرترین پاسـخ دسـتگاه معادلـه‌هـای تعـادل می‌بایست محاسبه شود.

برای تعیین مولدهای بهینه از الگوریتم فراابتکـاریCSS استفاده شده که شرح آن در بخش بعدی آمده است، اما

با مشخص بودن مولدها (به‌ازای یک ترتیب توالی مشخص از مولدها) محاسبهٔ درایه‌های هر ستون از ماتریس B_1 نیز خود نیازمند حل یک دستگاه معادله‌های خطی است. این دستگاه معادله‌ها که برای هر ستون شامل معادله‌های تعادل و معادله‌های مربوط به مولدها است، برای تمامی ستون‌های ماتریس B_1 به‌جز ستون آخر یک دستگاه فرومعین و برای ستون آخر یک دستگاه همواره معین با یک پاسخ منحصر به فرد است.

در دستگاه‌های فرومعین که دارای بی‌شمار پاسخ می‌باشند، هدف یافتن پرصفرترین پاسخ است. این مسئلهٔ که به‌عنوان یک زیرمسئله به‌ازای هر پاسخ معینی از مسئلهٔ اصلی(ترتیب معینی از مولدها) باید $\gamma(S)$ بار حل گردد تا ماتریس B_1 به‌دست آید، خود در ردهٔ مسائل NP-hard قرار می‌گیرد [12].

از طرفی این زیرمسئله، یافتن نقطه‌ای در یک فضای LP است که دارای بیشترین درجهٔ تباهیدگی باشد. بررسی تباهیده بودن یک مدل برنامه‌ریزی خطی(وجود حداقل یک پاسخ پایهٔ تباهیده) در ردهٔ مسائل NP_complete به اثبات رسیده است [13]. هم‌چنین مسئلهٔ تصمیم‌گیری در مورد وجود یک وجه تباهیده در یک چندوجهی غیرتهی نیز به‌عنوان یک مساله NP_complete اثبات گردیده‌است [14].

بنابراین می‌توان نتیجه گرفت مسئلهٔ یافتن نقطه‌ای با بیشترین درجهٔ تباهیدگی که حداقل به سختی مسئلهٔ تصمیم‌گیری متناظرش است، در ردهٔ مسائل NP-hard قرار می‌گیرد.

زیر مسئلهٔ مذکور را برای محاسبهٔ تمامی ستون‌های ماتریس B_1 می‌توان به صورت یک مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط نوشت. پارامترها و متغیرهای مدل به قرار زیر است :

M : تعداد اعضای سازه.

N : تعداد گره‌های سازه.

γ: درجهٔ نامعینی استاتیکی.

a_{ik}: درایهٔ مربوط به سطر iام و ستون kام ماتریس تعادل.

g_{nk}: پارامتر انتخاب مولد (اگر عضو kام در سیستم خودمتعادل nام به‌عنوان مولد انتخاب شده باشد یک و در غیر این‌صورت صفر است).

L : عدد مثبت بسیار بزرگ.

X_{kj}: متغیر تصمیم (درایهٔ مربوط به سطر kام و ستون jام ماتریس خودمتعادل B_1 که نشان‌دهندهٔ مقدار مربوط به عضو kام در سیستم خودمتعادل jام است).

Y_{kj}: متغیر تصمیم (اگر متغیر X_{kj} متناظر صفر شود مقدار صفر و در غیر این صورت مقدار یک به خود می‌گیرد).

$$(P) \quad \min \ Z=\sum_{k=1}^{M}\sum_{j=1}^{\gamma}Y_{kj} \tag{6}$$

Subject to

$$\sum_{k=1}^{M}a_{ik}X_{kj}=0 \quad \forall i=1,\dots,2N \quad j=1,\dots,\gamma \tag{7}$$

$$\sum_{k=1}^{M}g_{nk}X_{kj}=0 \quad \forall j=2,\dots,\gamma \quad n=1,\dots,\gamma \quad n<j \tag{8}$$

$$\sum_{k=1}^{M}g_{nk}X_{kn}=1 \qquad \forall n=1,\dots,\gamma \tag{9}$$

$$X_{kj}\le L.Y_{kj} \quad \forall k=1,\dots,M,\ j=1,\dots,\gamma \tag{10}$$

$$-X_{kj}\le L.Y_{kj} \quad \forall k=1,\dots,M,\ j=1,\dots,\gamma \tag{11}$$

$$Y_{kj}\in\{0,1\} \quad \forall k=1,\dots,M,\ j=1,\dots,\gamma \tag{12}$$

$$X_{kj}\in R \quad \forall k=1,\dots,M,\ j=1,\dots,\gamma \tag{13}$$

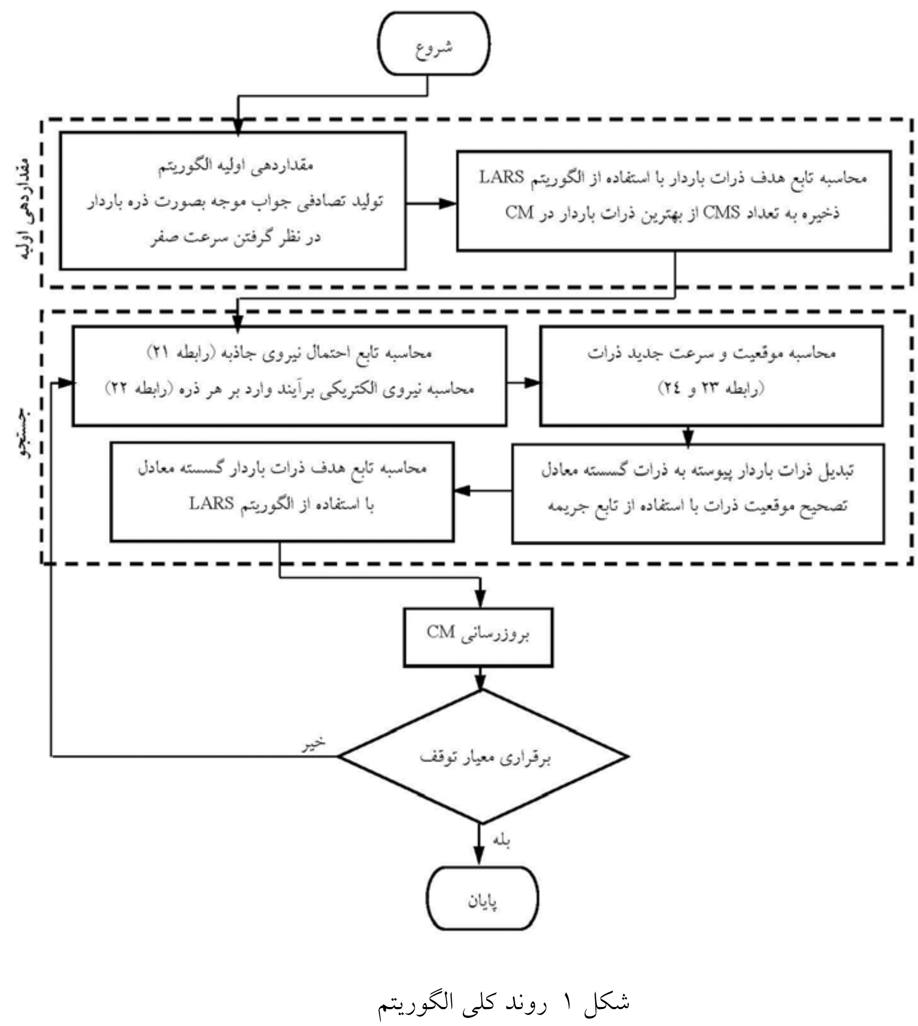
همان‌طور که ذکر شد به‌ازای یک ترتیب معین از مولدها (یک پاسخ خاص از مسئلهٔ اصلی) بی‌شمار پاسخ برای ماتریس B_1 وجود دارد و هدف مدل فوق یافتن پرصفرترین پاسخ از میان این پاسخ‌هاست. محدودیت (۷) در برگیرندهٔ معادله‌های تعادل است. محدودیت (۸) بیان می‌کند که در هر سیستم خودمتعادل اعضایی که به‌عنوان مولد برای سیستم‌های قبلی انتخاب شده‌اند باید برابر صفر باشد. محدودیت (۹) بیان می‌کند که مولد مربوط به هر سیستم خودمتعادل در همان سیستم باید برابر ۱ باشد. محدودیت‌های (۱۰) و (۱۱)

بیان‌کنندهٔ رابطهٔ میان متغیرهای Y_{kj} و X_{kj} های متناظر می‌باشند و نشان می‌دهند در صورتی که براساس محدودیت‌های قبلی X_{kj} نتواند مقدار صفر به خود بگیرد، Y_{kj} متناظرش برابر یک می‌شود و موجب بدترشدن تابع هدف خواهد شد.

رویکرد حل مسئله با استفاده از الگوریتم CSS

بنابر توضیحات بخش قبل، مسئلهٔ یافتن شکل بهینهٔ بردارهای پایه پوچی بدین صورت پیشنهاد شده است که مولدهای مناسب برای ساخت سیستم‌های خودمتعادل انتخاب گردند و مدل (P) به‌عنوان یک زیرمسئله به‌ازای هر انتخاب معینی از مولدها به‌صورت هم‌زمان حل شود.

در رویکرد پیشنهادی به‌منظور تعیین توالی مولدها و حل مسئلهٔ اصلی از الگوریتم CSS بهره گرفته شده‌است و به‌منظور حل زیرمسئلهٔ مذکور و محاسبهٔ عناصر سیستم‌های خودمتعادل (به‌ازای یک ترتیب معین از مولدها)، دستگاه معادله‌های حاصل توسط الگوریتم ابتکاری Least Angle Regression (LARS) حل می‌شوند [15]. فرآیند کلی الگوریتم پیشنهادی به‌صورت یک روندنما در شکل (۱) آورده شده است. در ادامه به شرح این رویکرد حل پرداخته می‌شود.



شکل ۱ روند کلی الگوریتم

طراحی اجزای الگوریتم CSS برای حل مسئلهٔ در فضای گسستهٔ صفر و یکی

الگوریتم فراابتکاری CSS با استفاده از جمعیتی از ذرات باردار و به‌کارگیری مکانیزم نیروهای جاذبه، به جستجو در فضای پاسخ مسئله و حرکت ذرات به‌سوی پاسخ بهینه می‌پردازد. مکانیزم این الگوریتم بر مبنای حرکت ذرات به‌صورت پیوسته در فضای پاسخ استوار است. در واقع در طول اجرای الگوریتم CSS ذرات به‌صورت پیوسته در فضا جابه‌جا می‌شوند و مکان جدید ذرات به‌صورت نقاط پیوسته‌ای در فضا به‌دست می‌آید، اما در این مقاله به‌منظور به‌کارگیری الگوریتم در یک فضای صفر و یکی رویکرد جدیدی پیشنهاد گردیده است که منجر به حرکت ذرات بر روی نقاط گسستهٔ موجود در فضا شود.

در رویکرد پیشنهادی از تبدیل ذرات پیوسته به ذرات گسسته در هر بار جابه‌جایی ذرات در طول روند حل الگوریتم استفاده می‌شود. از این رویکرد می‌توان برای به‌کارگیری CSS در فضاهای گسستهٔ صفر و یک مشابه نیز بهره گرفت.

نحوهٔ نمایش ذرات باردار

متغیر تصمیم‌گیری مسئله یک متغیر صفر و یک دوبعدی است که با g_{nk} نشان داده می‌شود. این متغیر بیان‌کنندهٔ عضوی است که به‌عنوان مولد برای سیستم‌های خود متعادل انتخاب شده است. g_{nk} یک است در صورتی‌که عضو kام در سیستم خود متعادل nام به‌عنوان مولد انتخاب شود و در غیر این‌صورت صفر خواهد بود. بنابراین یک پاسخ از مسئله که به‌عنوان یک ذره در CSS در نظرگرفته می‌شود به‌صورت زیر قابل بیان است :

$$G^{j} = \{g_{nk}^{j}\} \qquad (۲۷)$$

که g_{nk}^{j} متغیر دوبعدی g_{nk} متعلق به ذرهٔ jام است.

تولید پاسخ در فضای موجه

الگوریتم از یک جمعیت اولیهٔ ذرات که موقعیت آنها به‌صورت تصادفی در فضای موجه مسئله تعیین شده است، شروع می‌کند. هر ذره نشان‌دهندهٔ یک پاسخ در فضای موجه مسئله است. به‌منظور تولید یک پاسخ تصادفی، به‌ترتیب از اولین SES یک عضو به تصادف از میان انتخاب‌های موجه، به‌عنوان مولد برای سیستم مورد نظر انتخاب می‌شود. بعد از تعیین مولد برای تمامی سیستم‌های خودمتعادل، به منظور محاسبهٔ میزان تابع هدف پاسخ مورد نظر (درصد تنکی ماتریس سیستم‌های خودمتعادل حاصل) هر ستون از ماتریس با حل دستگاه معادله‌های مربوط توسط الگوریتم LARS به‌دست می‌آید. فضای موجه مسئله به‌صورت زیر تعریف می‌شود و پاسخی که در شرایط زیر صدق کند، به‌عنوان یک پاسخ موجه پذیرفته خواهد شد:

۱- براساس توضیحات قبلی، اگر عضوی به‌عنوان مولد برای یک سیستم خودمتعادل انتخاب شود، باید در سیستم بعدی مقدار صفر به خود بگیرد. بنابراین نمی‌تواند به‌عنوان مولد برای سیستم دیگری انتخاب شود. این محدودیت به‌صورت زیر قابل بیان است :

$$\sum_{n=1}^{\gamma(s)} g_{nk} \le 1 \qquad \forall k = 1,\ldots,M \qquad (۲۸)$$

۲- در هر سیستم خودمتعادل باید یک عضو به‌عنوان مولد انتخاب شود. رابطهٔ (۲۹) فرم ریاضی این محدودیت را نشان می‌دهد.

$$\sum_{k=1}^{M} g_{nk} = 1 \qquad \forall k = 1,\ldots,\gamma(s) \qquad (۲۹)$$

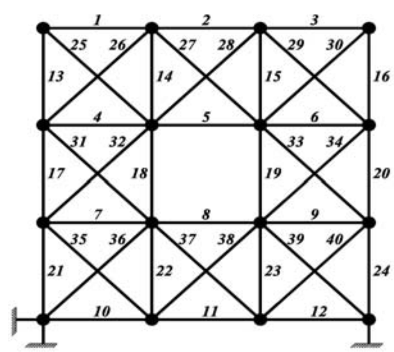
۳- مولدی که در هر سیستم می‌تواند انتخاب شود تحت تأثیر انتخاب‌هایی است که برای سیستم‌های خودمتعادل قبلی صورت گرفته است. فرض کنید انتخاب مولد برای سیستم خودمتعادل nام مد نظر باشد. تا این مرحله $2N+n-1$ معادله برای حل این سیستم خودمتعادل وجود دارد. که در آن N تعداد گره‌های سازه، $2N$ تعداد معادله‌ها تعادل و $n-1$ معادلهٔ دیگر، مربوط به مولدهای سیستم‌های خودمتعادل قبلی است که باید در این سیستم مقدار صفر بگیرند. حال با انتخاب یک عضو به‌عنوان مولد

برای سیستم nام، یک معادلهٔ دیگر بـه ایـن دسـتگاه اضافه خواهد شد. از این‌رو، تنها عضـوی مـی‌توانـد به‌عنوان مولد انتخاب شود که با اضافه شـدن معادلـهٔ مربوط به آن، دستگاه معادله‌ها حاصل سـازگار بـاقی بماند.

نتیجه‌های عددی

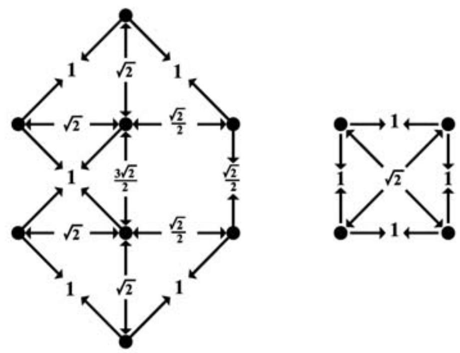
به‌منظور نشان دادن قابلیت الگوریتم پیشـنهادی در ایـن بخش مثال‌های عددی ارائه مـی‌شـود. بـرای کدنویسـی الگوریتم از نرم‌افزار MATLAB بهره گرفته شده اسـت. سیستم مورد استفاده برای اجرای الگـوریتم یـک رایانـه شخصی با پردازندهٔ Intel® core™ 2 Duo) ۲/۹۳ GHz CPU) و حافظهٔ (RAM) ۲/۰۰GB می‌باشد.

به‌عنوان اولین مثال خرپای نشان داده شده در شکل (۲) که دارای یک بازشو می‌باشـد، انتخـاب شـده اسـت تـا توانایی الگوریتم پیشـنهادی در مـورد سـازه‌هـای دارای بازشو، بررسی شود. در این حالت سازه دارای ۴۰ عضو و ۱٦ گـــره و $\gamma(S) = ۴۰ - ۲\times۱۶ + ۳ = ۱۱$، ۱۱ درجـــهٔ نامعیـن استاتیکـی است.



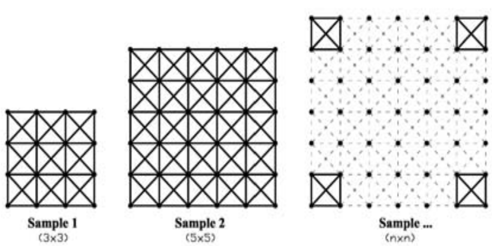
شکل ۲ سازهٔ دارای بازشو، ۱۱ درجهٔ نامعین استاتیکی

کلیه سیستم‌های خودمتعادل انتخابی قابل تقسـیم به دو تیپ مشخص می‌باشند که در شکل (۵) ، نیرو در این دو تیپ نشان داده شده است. تعداد درایه‌های غیـر صفر ماتریس پایه پوچی حاصل برابر ۹۰ می‌باشد یا بـه بیان دیگر حدود ۸۰٪ ماتریس پایه پوچی صفر می‌باشد.



شکل ۳ نیرو در سیستم‌های خودمتعادل انتخابی

برای نشان دادن قابلیـت الگـوریتم پیشـنهادی در حل مسائل بزرگ‌تر و زمان محاسباتی لازم با تغیر ابعـاد مسئله، یک بلوک شامل ٦ عضو و ٤ گره انتخاب شده و نمونه‌هایی از تکرار این بلـوک در دو راسـتای x و y ساخته شده است (شکل٤).



شکل٤ هندسهٔ نمونه‌های ساخته شده برای حل با الگوریتم پیشنهادی

نتیجه‌های به‌دست آمده در جدول (۱) نشـان داده شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود برای سـازه بـا ۱۰۰ گره ماتریس پایه پوچی حاصل حـدود ۹۵ درصـد تنک می‌باشد.

جدول ۱ نتیجه‌های به‌دست آمده برای پاسخ بهینه و زمان محاسباتی

الگوریتم پیشنهادی		تعداد مثال‌های حل شده	ابعاد ماتریس	تعداد گره‌ها
متوسط زمان حل (ثانیه)	پاسخ بهینه (درصد تنکی)			
٤٦/١٦	٨٤/٢٧	١٠	٤٢×١٣	١٦
٢١١/٥٩	٩٢/٠٨	١٠	١١٠×٤١	٣٦
١٠٩٧/٤٧	٩٤/٤٠	١٠	٢١٠×٨٥	٦٤
٣٦٠٨/٧٢	٩٥/٣١	١٠	٣٤٢×١٤٥	١٠٠

نتیجه‌گیری

در این مقاله، الگوریتمی ابتکاری برای یافتن بردارهای پایه پوچی تنک ارائه شده است. شکل بهینهٔ ماتریس پایه پوچی، منجر به تشکیل ماتریس نرمی بهینه می‌شود و هدف تحلیل مؤثر سازه به روش نرمی را تأمین می‌سازد. در طراحی الگوریتم سازنده، برای برقراری شرط استقلال بردارهای پایه پوچی، از خواص جبری استفاده شده است. بدین صورت که هر بردار نسبت به یک درایه که در اصطلاح مولد عنوان شده است نرمال می‌شود و رابطهٔ تعامد با سایر بردارها نوشته می‌شود. از آن‌جا که شماره و ترتیب انتخاب مولدها مهم‌ترین فاکتور در شکل‌گیری ماتریس مربوط می‌باشد، توالی انتخاب مولدها به‌عنوان متغیر تصمیم در مسئلهٔ بهینه‌یابی مدل‌سازی شده و سپس با استفاده از الگوریتم فراابتکاری

جستجوی سیستم ذرات باردار مسئله حل شده است. باتوجه به این‌که پس از انتخاب مولدها، دستگاه معادله‌های حاصل برای یافتن سایر درایه‌های بردارهای پایه پوچی یک دستگاه فرومعین خواهد بود، به‌منظور محاسبهٔ پرصفرترین پاسخ، یک مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط توسعه داده شده است، در حالی که در تکرارهای الگوریتم جستجوی سیستم ذرات باردار از الگوریتم ابتکاری LARS استفاده شده است که این امر به‌طور بدیهی منجر به کاهش حجم و زمان محاسبات شده است.

حل مثال عددی بیانگر توانایی الگوریتم پیشنهادی در یافتن پاسخ نزدیک بهینه حتی در حالت سازه‌های خاص دارای بازشو می‌باشد.

مراجع

1. Kaveh, A., "*Computational Structural Analysis and Finite Element Methods*", Springer International Pu, pp. 46-98, (2014).
2. Denke, P. H., "*A General Digital Computer Analysis of Statically Indeterminate Structures*", NASA TD D-1666, pp.8-31 (1962).
3. Kaveh, A., Koohestani, K., "Efficient Graph Theoretical Force Method for Two Dimensional Rectangular Finite Element Analysis", *Communications in Numerical Methods in Engineering*, pp. 25951–971, (2009).
4. Kaveh, A., NaseriNasab, E., "A New Four Node Quadrilateral Plate Bending Element for Highly Sparse and Banded Flexibility Matrices", *Acta Mechanica*, Vol. 209, pp. 295–309, (2010).
5. Kaveh, A., Tolou Kian, M. J., "Efficient Finite Element Analysis Using Graph Theoretical Force Method with Brick Elements", *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 54, pp. 1 – 15, (2012).

6. Kaveh, A., Daei, M., "Formation of Statical Basis for Efficient Force Method by Ant Colony Optimization", *m Civil Engineering*, Vol. 10, pp. 113-130, (2009).
7. Kaveh, A., Talatahari, S., "A Novel Heuristic Optimization Method: Charged System Search", *Acta Mechanica*, Vol. 213, pp. 267-289, (2010).
8. Kaveh, A., Talatahari, S., "Charged System Search for Optimum Grillage System Design Using the LRFD-AISC Code", *Journal of Constructional Steel Research*, Vol 66, No. 6, pp. 767-771, (2010).
9. Kaveh, A., and Talatahari, S., "Geometry and Topology optimization of Geodesic Domes Using Charged System Search", *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol 43, No. 2, pp. 215-229, (2011).
10. Kaveh, A., and Behnam, A. F., "Cost Optimization of a Composite Floor System, One-way Waffle Slab, and Concrete Slab Formwork Using Charged System Search Algorithm", *Scientia Iranica*, Vol 19, pp. 410-416, (2012).
11. Kaveh, A., "Structural Mechanics: Graph and Matrix Methods", 3rd edn, Research Studies Press (Wiley), Somerset, UK, (2004).
12. Donoho, D. L., "Sparse Solution of Underdetermined Systems of Linear Equations by Stagewise Orthogonal Matching Pursuit", *Information Theory, IEEE Transaction*, Vol. 58, pp. 1094-1121, (2012).
13. Chandrasekaran, R., Kabadi, S. N., and Murthy, K. G., "Some NP-complete Problems in Linear Programming", *Operations Research Letters*, Vol. 1, pp. 101-104, (1982).
14. Sierksma, G., Tijssen, G. A., "Degeneracy Degrees of Constraint Collections", *Mathematical Methods of Operations Research*, Vol. 57, pp. 437-448, (2003).
15. Efron, B., "Least Angle Regression", *The Annals of Statistics*, Vol. 32, pp. 407-499, (2003).